Analiza zespolona
Lista 1

Wprowadźmy na zbiorze $\mathbb{R}^2$ uporządkowanych par liczb rzeczywistych następujące działania „+” i „·”:

$$(a,b)+(c,d) := (a+b, c+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Trójka $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ jest ciałem. Ciało to nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Elementy ciała $\mathbb{C}$ nazywamy *liczbami zespolonymi.*
Utożsamiając liczbę a z parą $(a,0)$ otrzymujemy naturalne zanurzenie ciała liczb rzeczywistych w ciało liczb zespolonych. Przyjmując oznaczenia: $a := (a,0)$, $i := (0,1)$, liczba zespolona przybiera postać

$$z = (a,b) = a+ib, \qquad \text{gdzie} \quad i^2 = i\cdot i = -1.$$

Liczbę a, w tym przedstawieniu, nazywamy częścią rzeczywistą i oznaczamy $\operatorname{Re} z$, natomiast liczbę b nazywamy częścią urojoną i oznaczamy $\operatorname{Im} z$. [1]
Liczbę zespoloną $(a,-b) = a-ib$ nazywamy sprzężoną z liczbą $z=(a,b)=a+ib$ i oznaczamy $\overline{z}$.

Zad 1. Sprawdzić, że rodzina macierz

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R} \right\}$$

wraz z naturalnymi operacjami macierzowymi jest ciałem izomorficznym z ciałem liczb zespolonych. Podać interpretację sprzężenia oraz wyznacznika takich macierzy w języku liczb zespolonych.

Zad 2. Wykazać, że dla $z,w\in\mathbb{C}$ zachodzi

a) $\overline{\overline{z}} = z$,

b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$,

c) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$,

d) $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

e) $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,

f) $z\cdot\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

Zad 3. Przedstawić liczbę zespoloną w postaci biegunowej (trygonometrycznej).

Zad 4. Podać interpretację geometryczną mnożenia dwu liczb zespolonych. Wyciągnąć stąd następujące wnioski:

1) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, dla dowolnych $z,w\in\mathbb{C}$,

2) $|z|^2 = z\overline{z}$, dla każdego $z\in\mathbb{C}$,

3) wzór Moivre'a: $z^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\big)$, gdzie $\varphi = \arg z$,

4) istnieje dokładnie n pierwiastków n-tego stopnia z liczby zespolonej $a\neq 0$.

Zad 5. Wyznaczyć sumę oraz iloczyn wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z jedynki.

Zad 6. Korzystając z własności modułu i sprzężenia liczb zespolonych wykazać, że dla dowolnych $z,w\in\mathbb{C}$ zachodzi:

1) $|z+w| \le |z|+|w|$ (*nierowność trójkąta*),

2) $\Big||z|-|w|\Big| \le |z-w|$,

3) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$ (*tożsamość równoległoboku*).

---

[1] Re od *realis*, Im od *imaginaris*